$f(x)=\ln(x+3), x\in]-3,+\infty[$

1) $f'(x)=\dfrac{1}{x+3}>0$

T.V:

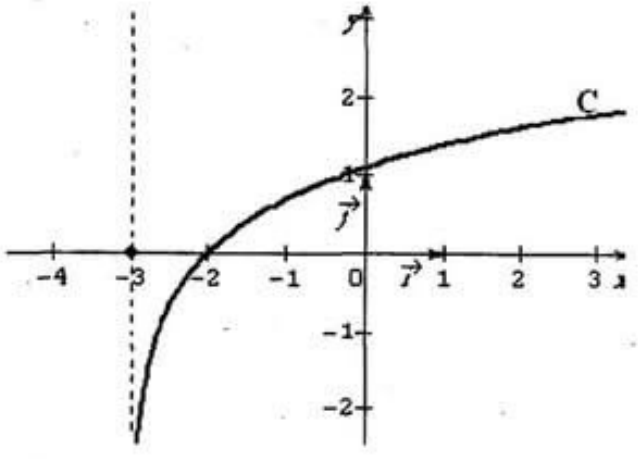
x	-3	$+\infty$
$f(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

$$\lim_{x\to(-3)^+} f(x)=\lim_{x\to(-3)^+}\ln(x+3)$$
$$=\lim_{X\to 0^+}\ln X=-\infty,(X=x+3)$$
$$\lim_{x\to+\infty}\ln(x+3)=\lim_{X\to+\infty}\ln X=+\infty,(X=x+3)$$

On a:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+3)}{x}=\lim_{X\to+\infty}\frac{\ln X}{X-3},(X=x+3)$$
$$=\lim_{X\to+\infty}\frac{\frac{\ln X}{X}}{\frac{X-3}{X-3}}=\frac{0}{1}=0$$

Donc (C) admet une branche infinie parabolique de direction $(o,\vec{i})$.



2) $h(x)=f(x)-x, x\in]-3,+\infty[$

$$h'(x)=f'(x)-1=\frac{1}{x+3}-1=\frac{-x-2}{x+3}<0$$

Pour tout $x\in]1,2[$: h est continue et strictement décroissante donc h est une bijection de $]1,2[$ sur $]h(2),h(1)[=]\ln 5-2,\ln 4-1[$

Or : $\ln 5-2\approx -0,39$; $\ln 4-1\approx 0,386$

Donc $0\in]\ln 5-2,\ln 4-1[$ et par suite $h(x)=0$ admet une unique solution $\alpha\in]1,2[$.

3)

$$\begin{cases}U_0=1\\ U_{n+1}=f(U_n), n\in\mathbb{N}\end{cases}$$

a/ par récurrence sur $\mathbb{N}$:

i) pour $n=0$ on a $1\le U_0=1\le 2$ Vrai

ii) supposons que $1\le U_n\le 2$ et montrons que $1\le U_{n+1}\le 2$ En effet on a :

$1\le U_n\le 2$ et f est croissante sur $[1,2]$

Donc $f(1)\le f(U_n)\le f(2)$

Avec : $f(1)=\ln 4\approx 1,38\ge 1$

$f(2)=\ln 5\approx 1,609\le 2$

Donc $1\le U_{n+1}\le 2$

Conclusion : $\forall n\in\mathbb{N}: 1\le U_n\le 2$

b/ montrons par récurrence que $U_n\le U_{n+1}, \forall n\in\mathbb{N}$

i) pour $n=0$ on a :

$U_0=1$ et $U_1=f(U_0)=f(1)=\ln 4$

et $1\le\ln 4\Rightarrow U_0\le U_1$ Vrai

ii) supposons que $U_{n-1}\le U_n$ et montrons que $U_n\le U_{n+1}$ en effet on a :

$U_{n-1}\le U_n$ et f est croissante sur $[1,2]$

et $U_n\in[1,2], \forall n\in\mathbb{N}$

Donc $f(U_{n-1})\le f(U_n)\Leftrightarrow U_n\le U_{n+1}$

D'où (U_n) est une suite croissante et majorée par 2 donc (U_n) converge vers un réel ℓ

Calcul de ℓ : on a :